NB: Notes cours 13.1 complétées sur moodle.

Cours 13.2

n°26

12.12.24

Rappel :

Théorème 7.1.2 (Diagonalisation matrices symétriques)

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(Important)

1) Si $A = A^T$ et $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ sont des vect. propres de A associés à des val. propres λ_1, λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (val. propres distinctes)

alors $v_1 \perp v_2$

(donc les espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} sont orthogonaux) :

vrai pour $A = A^T$

2) A est orthogonalement diagonalisable $\Leftrightarrow A = A^T$ ($\leftarrow \mathbb{R}$)

3) Si $A = A^T$, alors

i) Toutes les val. propres de A sont réelles

En particulier A possède n valeurs propres comptées avec leur multiplicité

(ce sont les racines de $c_A(t)$)

ii) $\forall \lambda \in Spc(A) \subset \mathbb{R}$ (càd λ val. propre de A)

on a $\dim(E_\lambda) = mult(\lambda)$

iii) $E_\lambda \subset E_\mu^\perp$ si $\lambda \neq \mu$

4) Si $A = A^T$ on a la <u>décomposition spectrale de A</u>

$$\boxed{A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T} \quad \star$$

où $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormée (ordonnée) de $\mathbb{R}^n$ et u_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_i \in \mathrm{Spc}(A)$.

(Rappel Fin Thm 7.1.2)

<u>explication de $\star$</u> :

Comme $A = A^T$ d'après 2) A est orthog. diagonalisable :

$\exists$ P orthogonale $\in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ $\quad P^{-1} = P^T$ $(P^T P = I_n = P P^T)$

$\exists$ D diagonale

telles que $A = P D P^T$, donc posons

$P = (u_1 | \dots | u_n)$ où $u_i \in \mathbb{R}^n$ est tq

u_i vecteur propre de A associé à $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$\{u_1, \dots, u_n\}$ forment une base orthonormée (ordonnée) de $\mathbb{R}^n$.

et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où λ_i val. propre associée à u_i

placée dans le même ordre.

telles que

$$A = \left(u_1 \middle| \cdots \middle| u_n\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline u_n^T \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\left(\lambda_1 u_1 \middle| \cdots \middle| \lambda_n u_n\right)} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline u_n^T \end{pmatrix}$$

$$= \left[\lambda_1 \left(u_1 | 0 | \cdots | 0\right) + \lambda_2 \left(0 | u_2 | \cdots | 0\right) + \cdots + \lambda_n \left(0 | \cdots | u_n\right)\right] P^T$$

$$\overset{\heartsuit}{=} \lambda_1 u_1 u_1^T + \cdots + \lambda_n u_n u_n^T$$

(Pour $\heartsuit$: $\left(0 | \cdots | u_i | 0 | \cdots | 0\right) \begin{pmatrix} u_1^T \\ \hline \vdots \\ \hline u_n^T \end{pmatrix} = u_i u_i^T$).

Fin explication Thm 7.1.2.

Rem 7.1.3 : Dans l'écriture $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^T$

chaque sommant est une matrice $n \times n$

$u_i \in \mathbb{R}^n = M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $u_i^T \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ on a

$$\underbrace{u_i^T u_i}_{= u_i \cdot u_i} = \|u_i\|^2 = 1$$ car les u_i unitaires (normées)

$u_i u_i^T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrice carrée de rang 1

et $u_i u_i^T$ est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Vect}\{u_i\} = \{\lambda u_i \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

En effet, prenons $u \in \mathbb{R}^n$ t.q $\|u\| = 1$

$$u u^T = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}_{u} (u_1 \cdots u_n) = \underbrace{\left(u_1 u \middle| u_2 u \middle| \cdots \middle| u_n u \right)}_{\substack{\mathrm{Col}(uu^T) \\ = \mathrm{Vect}\{u\}}}$$

$\mathrm{rang}(uu^T) = 1$

et $(uu^T)x = (uu^T)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$= \left(u_1 u \,\middle|\, u_2 u \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, u_n u\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 u_1 u + x_2 u_2 u + \cdots + x_n u_n u$$

$$= (x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n)\, u = (x \cdot u)\, u$$

or $\operatorname{proj}_u(x) = \dfrac{x \cdot u}{u \cdot u}\, u$ or ici $u \cdot u = 1$

donc $(uu^T)x = \operatorname{proj}_u(x)$

($P = uu^T$ vérifie $P^2 = (uu^T)(uu^T) = u\underbrace{(u^T u)}_{1}u^T$
$= uu^T = P$)

<u>Ex 7.1.4 :</u>

$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $A = A^T \overset{\text{Thm}}{\Rightarrow} A$ est orth. diagon.

<u>Rem</u> : somme des lignes $= 3$

$\Rightarrow \lambda = 3$ est val. propre et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$c_A(t) = \det(A - tI_3) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 6-t & -2 & -1 \\ -2 & 6-t & -1 \\ -1 & -1 & 5-t \end{pmatrix}$$

$\ell_1 \leftrightarrow \ell_3$

$$= - \det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5-t \\ -2 & 6-t & -1 \\ 3-t & 3-t & 3-t \end{pmatrix}$$

$\ell_3 \to \ell_3 + \ell_2 + \ell_1$

$$= \underbrace{-(3-t)}_{(t-3)} \det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5-t \\ -2 & 6-t & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (t-3) \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6-t \\ -2 & 6-t & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\ell_1 \to \ell_1 + \ell_3$

$$= (t-3)(6-t) \det\begin{pmatrix} -2 & 6-t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ dév. p.r 1ère ligne

$$= (t-3)(6-t)(t-8)$$

$$\mathrm{Spc}(A) = \{3, 6, 8\}$$

Base de $\mathbb{R}^3$ formée de vect. propres de A

$\lambda_1 = 8 \xRightarrow{\text{calculs}} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E_8 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$\lambda_2 = 6 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $E_6 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

$\lambda_3 = 3 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_3 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

car $A = A^T$

(v_1, v_2, v_3) base orthogonale de $\mathbb{R}^3$
formée de vect. propres de A

pas orthonormée

$u_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$ $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$\quad\;\; \underbrace{}_{u_1} \quad \underbrace{}_{u_2} \quad \underbrace{}_{u_3}$

est orthogonale

$P^T P = I_3$

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ et $A = PDP^T$

ou encore

$$A = 8u_1u_1^T + 6u_2u_2^T + 3u_3u_3^T$$

décompo spectrale de A.

$$u_1u_1^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2u_2^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$u_3u_3^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fin 7.1.4.

Rappel : Si $A = A^T$ $\quad (A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}))$

on a $x \cdot_A y \overset{\text{def}}{=} x \cdot (Ay) = y \cdot_A x$ (car $A = A^T$)

on doit encore étudier

la gestion $\underbrace{x \cdot_A x}_{x^T A x} \geq 0$? $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Pour étudier cela on introduit la notion de

§ 7.2 Formes quadratiques

Déf 7.2.1 : Si V possède une fonction

$V \times V \to \mathbb{R}$ qui vérifie 1) 2) 3)

$(u, v) \mapsto u \cdot v = \langle u | v \rangle$ de ~~PS~~

on définit $\forall x \in V$

$$q(x) = x \cdot x = \langle x | x \rangle = \langle x, x \rangle$$

cela fournit une fonction, appelée forme quadratique associée à $\langle , \rangle$

$$q : V \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto q(x)$$

si $q(\lambda x) = (\lambda x)\cdot(\lambda x) = \lambda^2 x\cdot x$

$= \lambda^2 q(x)$.

Ex 7.2.2 :

$V = \mathbb{R}^n \qquad A = A^T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

1) posons $q_A(x) = \underbrace{x \cdot_A x}_{\in \mathbb{R}} = x^T A x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

c'est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

Rem : $q_A(e_i)$ $\qquad e_i =$ ième vecteur base canonique

$= e_i^T A e_i = A_{ii}$

$\left(e_i^T A e_j = A_{ij} \right)$

1') $A = I_n \quad q_{I_n}(x) = x^T x = x \cdot x =$

$= x_1^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2$

1°) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad q_A(x)$ pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$q_A(x) = x^T A x = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

$$= 3x_1^2 \underbrace{- 4x_1x_2}_{\text{terme mixte}} + 7x_2^2$$

termes diagonaux

2) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad$ posons

$$q(x) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 8x_2x_3$$

← pol. homogène de degré 2 en 3 variables.

termes mixtes

Écrire $q(x) = x^T A x$

pour $A = A^T \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

on prend $A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 1^{\text{ère}} & 2^{\text{ème}} & 3^{\text{ème}} \end{array} \end{array}$ $8/2$

3) Étant donnée une f.q $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ fixé on peut calculer $q(x)$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5+3+2-1+8 = 17.$$

Fin ex 7.2.2.

Déf. 7.2.3 : $x \in \mathbb{R}^n$ inconnue

on appelle changement de variable (linéaire) une relation $x = Py$ où $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ inversible

$(y = P^{-1}x)$

NB : $y = [x]_B$ où B = base formée des colonnes de P

$y = Px$ $\quad P = P_{B\mathcal{E}}$ $\quad \mathcal{E}$ = base canonique

Thm 7.24 : Thm des axes principaux d'une forme quadratique

(Important)

Soit $A = A^T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

alors $\exists$ P orthogonale $\in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

tq. le chang. de variable $x = Py$ $(y = P^T x)$

transforme la forme quadratique

$q_A(x) = x^T A x$ en

$q_D(y) = y^T D y$

qui est une forme quadratique (sans termes mixtes) diagonale c.à.d $q_D(y) = y^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} y$

$= \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

Les colonnes de P sont appelées les axes principaux de la forme $q_A(x) = x^T A x$.

Idée de démo : $A = A^T \underset{\text{Thm}}{\Rightarrow} A$ est orth. diag.

Donc $\exists P$ orthogonale et D diagonale

tq $A = PDP^T$ (i.e $D = P^TAP$)

Posons $x = Py$, alors

$$q_A(x) = x^TAx = (Py)^TA(Py)$$

$$= y^T \underbrace{P^TAP}_{D} y = y^TDy = q_D(y).$$

cqfd.

Exemple 7.2.5 : $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ $A = A^T$

Pour $c \in \mathbb{R}$ on peut montrer que l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \underset{\underset{x^TAx}{\parallel}}{q_A(x)} = c\}$$ est

soit
- ellipse (cercle)
- hyperbole
- deux droites sécantes
- un point
- $\emptyset$

Si A est diagonale, $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

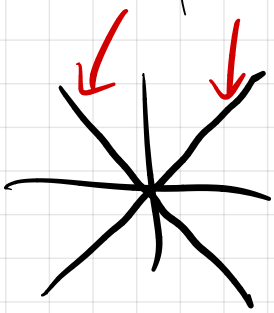
$$\boxed{q_A(x) = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ val. propres de A

$\alpha = 1, \beta = 1$ $\quad x_1^2 + x_2^2 = c$ — cercle si $c>0$ / 1 point si $c=0$ / $\emptyset$ si $c<0$

$\alpha = 1 \quad \beta = -1 \quad x_1^2 - x_2^2 = c$

si $c=0$ $\quad x_1^2 = x_2^2$



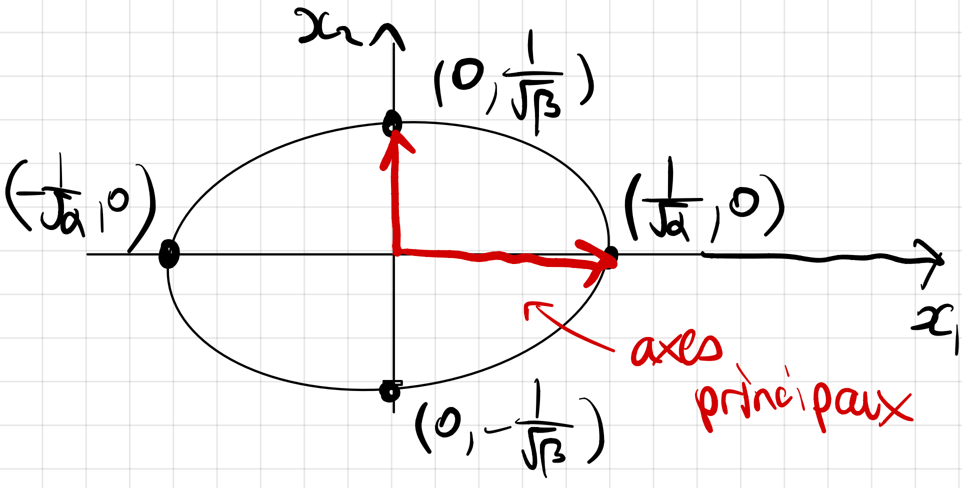
Supposons A inversible $\Leftrightarrow \alpha\beta \neq 0$

- $\alpha > 0 \quad \beta > 0$ $\quad$ on a une ellipse droite

pour $c = 1$

$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 = 1$

$x_2 = 0 \quad x_1^2 = \frac{1}{\alpha}$

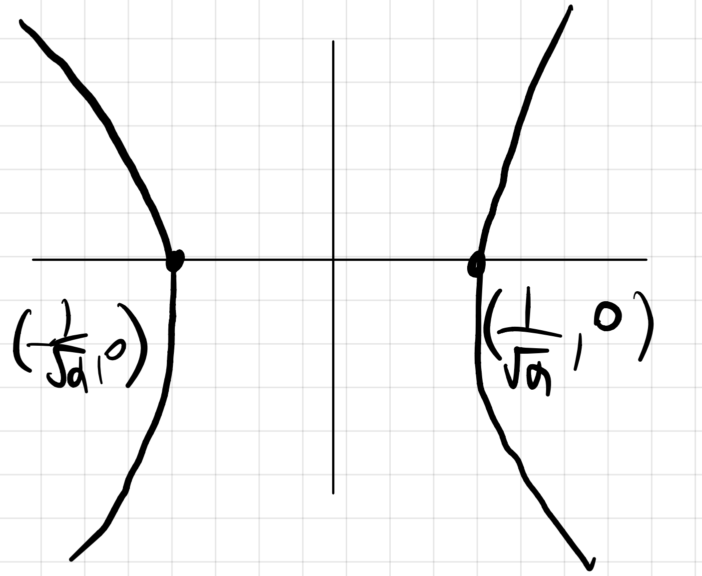


- si $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

hyperbole droite

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 = 1$$

$(\beta < 0)$



<u>ex 7.2.6</u> :

$$\underbrace{5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2}_{x^T A x} = 48$$

où $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = A^T$ $\quad Sp(A) = \{3, 7\}$

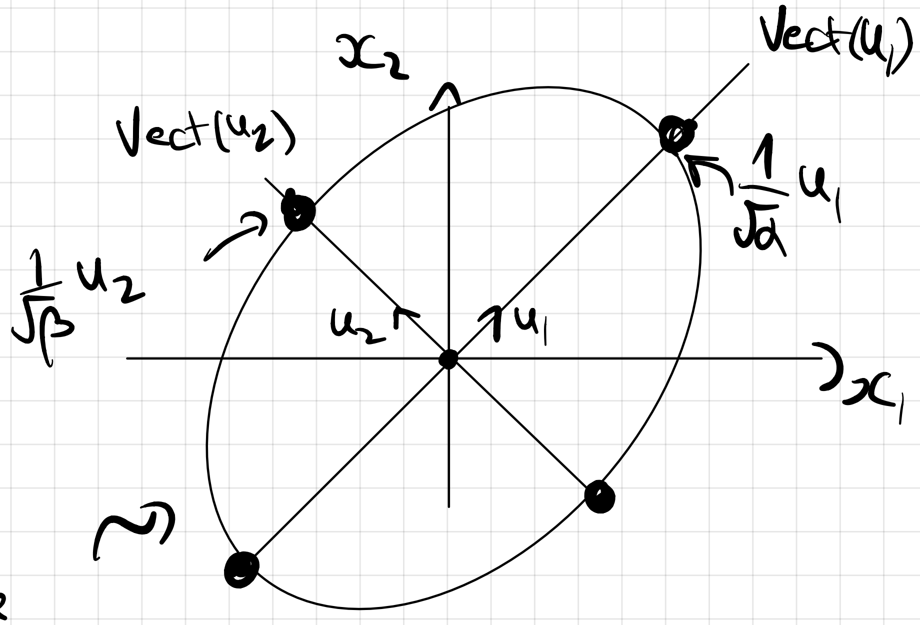
$\lambda_1 = 3 \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 7 \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$u_1 \perp u_2 \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonale.

le chang. $x = Py$ transforme $q_A(x)$ en
$y = P^T x$

$$x^T A x = y^T D y = 3y_1^2 + 7y_2^2 = 48$$

$$\underbrace{\frac{3}{48}}_{\alpha} y_1^2 + \underbrace{\frac{7}{48}}_{\beta} y_2^2 = 1$$



ellipse tournée

Fin 7.2.6.

Pour la série 13

Demandez à vos AE / déf. de définie positive et définie négative.